Alain Guimier

Décomposition polaire des matrices de Lorentz . Explicitation du terme symétrique et du terme orthogonal .

Août 2022

Nous prposons une construction hypothético – déductive de la transformation de Lorentz dans le cas général et une explicitation des 2 termes de la forme polaire de cette transformation • Cette nouvelle version est essentiellement une reécriture du chapitre 3.

Chapitre I : Axiomatique • Matrices de Lorentz •

*On considère notre espace physique assimilé à un espace affine réel à **3** dimensions **E** dans lequel peuvent se mouvoir librement par rapport à **E** et entre eux des points appelés "observateurs " .On considère* $\mathcal{P}$ *un ensemble de ces points **O** auxquels on associe un repère orthormé* $R_O\left(O, \vec{i_O}, \vec{j_O}, \vec{k_O}\right)$ *et une horloge* H_O*.*
On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées sur $\mathcal{P}$ *:*

(***Hypothèse 1***) *: Pour tout point* $O \in \mathcal{P}$*, on suppose que pour tout point **Q** défini à partir de* R_O *on peut lui associer une horloge synchronisée avec celle de **O** .*

Conséquence : *La synchronisation des horloges dans chaque repère permet d'associer à chaque observateur **O** un repère* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ *quadrimensionel d'origine* $\mathcal{O}$ *: **O** au temps* $t_0 = 0$ *puisque la variable temporelle **t** est indépendante des variables spatiales .*
On définit ainsi une famille de repères quadridimensionnels $\left(\mathcal{R}_{\mathcal{O}}\right)$ *:*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}} = \mathcal{R}_{\mathcal{O}}\left(O_{t_0=0}, e_1 = c \cdot \tau, e_2 = I, e_3 = J, e_4 = K\right)$$ *avec **c** la vitesse de la lumière ,*

τ *vecteur temporel unitaire porté par la droite d'univers associées à **O** ,*
*et **I, J, K** sont* $\vec{i_O}, \vec{j_O}, \vec{k_O}$ *au temps* $t_0 = 0$ *.*
On définit aussi sur $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ *la forme bilinéaire symétrique définie par*

$\varphi\left(e_i, e_j\right) = 0$ *pour* $i \neq j$, $\varphi\left(e_1, e_1\right) = 1$, $\varphi\left(e_i, e_i\right) = -1$ *pour* $i = 2, 3, 4$.

(***Hypothèse 2***) *: Si une ligne d'univers est une droite affine pour* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$*, elle est aussi une droite affine pour tout autre* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$ *.*

(***Hypothèse 3***) *:*
On suppose que les espaces E_O *défini par* $\left(R_O, H_O\right)$ *sont munis des mêmes lois physiques qui permettent de définir les mêmes unités de mesure d 'espace et de temps pour chaque* E_O *.*

On choisit un point arbitraire O_0 *de* $\mathcal{P}$ *et le temps* $t_{O_0} = 0$ *indiqué par* H_{O_0} *.*

*Pour tout point **O** de* $\mathcal{P}$*, par translation spatiale prenons comme nouvelle origine spatiale de* E_O *le point **O'** de* R_O *qui coïncide avec* O_0 *au temps* $t_{O_0} = 0$ *.*

Prenons comme nouvelle origine temporelle de E_O*, l'instant où **O'** et* O_0 *coïncident .*
Par la suite , on supposera que tout les repères spatiaux R_O *auront leur origines confondues au temps* $t = 0$ *de leur horloge respective .*
Et par conséquent la famille de repères quadridimensionnels $\left(\mathcal{R}_{\mathcal{O}}\right)$ *aura la même origine spatio − temporelle .*

(***Hypothèse 4***) *: On suppose que la lumière a un mouvement rectiligne uniforme dans tout* E_O *et que sa vitesse numérique **c** est constante et indépendante de la source d'émission et de l'espace* E_O *considéré.*

Conséquence : *Si* $X = (ct, x, y, z)$ *est le vecteur représentant la position d'un photon issu de l'observateur **O** au temps* $t = 0$ *pour le repère* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$
et si $X' = (ct', x', y', z')$ *est le vecteur représentant*

la position de ce même photon issu de l'observateur O' *au temps* $t'=0$

on a $c^2 = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{t^2} = \dfrac{x'^2+y'^2+z'^2}{t'^2}$ *pour* $t>0$ *et* $t'>0$.

Donc les coordonnées du photon vérifieront simultanément :

$c^2t^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *et* $c^2t'^2 - x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$ *dans* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ *et* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$.

Si on considère la forme quadratique associée à φ *:*

$\Phi(X) = c^2t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0.$

(***Hypothèse 5***) : *Isotropie de l'espace.*
Nous énoncerons cette hypothèse au chapitre III.
(*Voir auussi C. Semay , B. Silvestre − Brac : relativité restreinte p.*105)

Le problème à résoudre :

On cherche une transformation $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *inversible qui donne les coordonnées spatio − temporelles du point* P *pour l'observateur* O *en fonction de celles de l'observateur* O',
telle que sous les hypothèses **1, 2, 3, 4** *ci-dessus possède les invariants suivant :*

(*1*) $T(0) = 0$,
(*2*) T *transforme les droites affines en droites affines* ,
(*3*) *si* $X = T(X')$: $\Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0$ *c'est à dire que* T *laisse invariant le cône d'isotropie de* Φ.

Remarques :
L'inversibilité permet d'avoir un groupe de transformation.
La première condition vient de l'origine commune des **2** *repères et que dès que* T *est affine, elle est linéaire.*
Les **2** *autres conditions traduisent les* **2** *invariances admises par les hypothèses* **2** *et* **4**.
Le seul paramètre qui lie O *et* O' *est la vitesse relative* $\vec{V}$ *de* O' *par rapport à* O *et donc* $T = T(\vec{V})$.

Pour cela on va utiliser les **2** *théorèmes suivants donnés dans toute leur généralité :*

Théorème 1 : (*P • Boyer*. "Algèbre et Géométries". *C&M 2015 p.51*).
Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *une bijection d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *de dimension* ≥ 2 *sur un corps* $\mathbb{K}$ *possédant au moins* **3** *éléments, telle que pour tout* a, b, c *alignés alors* $f(a)$, $f(b)$ $f(c)$ *sont alignés, alors* f *est semi − affine.*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ f *est affine.*
(*Ce théorème est appelé théorème fondamental de la géométrie affine • Abouabdillah Driss a proposé une version améliorée de ce théorème :* (*https//ssrn • com/abstract = 3181422*) *en remplaçant l'hypothèse* f *bijective par* f *surjective*).
Conséquence : Dans un espace affine réel les bijections qui conservent les droites affines sont les applications affines bijectives.

On note $\mathcal{C}(\phi) = \{x / \phi(x,x) = 0\}$ *le cône d'isotropie de* ϕ *une forme bilinéaire symétrique et* $Rad\ \phi = \{x / \forall y\ \phi(x,y) = 0\}$.

Remarque : Si ϕ *est la forme bilinéaire symétrique associée à* $\Phi = c^2t^2 - x^2 + y^2 + z^2$: $Rad\ \phi = \{0\}$.

Théorème 2 : (*R.Goblot*. "Algébre linéaire" *Masson 1995 p.254*)
Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$, E *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, *une forme bilinéaire symétrique telle que* $Rad\ \phi \neq \mathcal{C}(\phi)$.

Pour qu'une forme bilinéaire ϕ' *soit proportionnelle à* ϕ, *il faut et il suffit que* $\mathcal{C}(\phi) = \mathcal{C}(\phi')$.

(*Comparer ce théorème associé aux formes linéaires ayant un noyau commun .*)

Les conditions (1) *et* (2) *imposées à* $\boldsymbol{T}$ *implique que* $\boldsymbol{T}$ *est linéaire* (*Théorème 1*) .

Soit $\boldsymbol{M}$ *est la matrice qui représente* $\boldsymbol{T}$ *dans les bases associées aux repères* $\mathfrak{R}_{\boldsymbol{O}}$ *et* $\mathfrak{R}_{\boldsymbol{O'}}$.

Si on note $\boldsymbol{X'=MX}$, *on a* $\quad \boldsymbol{\Phi}(X) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi}(X') = \boldsymbol{\Phi}(MX) = 0$

alors (**Théorème 2**) $: \exists\, \lambda \neq 0, \quad \forall X \ \ \Phi(MX) = \lambda \cdot \Phi(X)$

en notant $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *on a :*

$${}^{t}(MX)\,G(MX) = {}^{t}X\,{}^{t}MGMX = \lambda \cdot {}^{t}XGX \Leftrightarrow {}^{t}MGM = \lambda \cdot G$$

la dernière équivalence est conséquence de la symétrie des matrices ${}^{t}\boldsymbol{MGM}$ *et* $\boldsymbol{G}$.

(*J-M. Monier.* "Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997 .*)

Evaluation de $\boldsymbol{\lambda}$ *:*

Montrons d'abord que si la vitesse de $\boldsymbol{O'}$ *mesurée par l'observateur* $\boldsymbol{O}$ *est* $\vec{V}$,
la vitesse de $\boldsymbol{O}$ *mesurée par l'observateur* $\boldsymbol{O'}$ *est* $-\vec{V}$:

(*Pour le moment on ne dispose que des hypothèses ci − dessus*)

(*cf C • Semay , B • Silvestre - Brac •* "Relativité restreinte". *Dunod 2010 p108 note* 5)

On se place d'abord du point de vue de l'observateur $\boldsymbol{O}$.

Considérons le cas où $\boldsymbol{O'}$ *s'éloignant de* $\boldsymbol{O}$.

Plaçons nous du point de vue de l'observateur $\boldsymbol{O}$.

Un rayon lumineux part de $\boldsymbol{O}$ *vers* $\boldsymbol{O'}$ *au temps* t_0 , *atteint* $\boldsymbol{O'}$ *au temps* t_1 *au point* $\boldsymbol{P_1}$,
et revient immédiatement vers $\boldsymbol{O}$, *qui est atteint au temps* t_2 *puis repart immédiatement vers* $\boldsymbol{O'}$ *qui est atteint au temps* t_3 *au point* $\boldsymbol{P_2}$,
puis retourne immédiatement vers $\boldsymbol{O}$ *qui est atteint au temps* t_4.

Il y a donc un double aller − retour.

La vitesse numérique $\boldsymbol{c}$ *du rayon lumineux étant la même dans les* $\boldsymbol{2}$ *sens on a :*

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2} \ \text{ et } t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2} \ .$$

Lorsque le rayon lumineux atteint , au temps t_1, *le point* $\boldsymbol{P_1}$,
$\boldsymbol{O'}$ *continue à s'éloigner de* $\boldsymbol{O}$ *alors que le rayon retourne vers* $\boldsymbol{O}$.

$t_3 - t_1 = \dfrac{t_4 - t_0}{2}$ *est la durée entre les* $\boldsymbol{2}$ *contacts du rayon lumineux et* $\boldsymbol{O'}$.

Si on suppose que $\boldsymbol{O'}$ *a une vitesse uniforme* $\vec{V}$ *de module* $\boldsymbol{V}$ *on a* $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = V \cdot \dfrac{t_4 - t_0}{2}$.

On peut remarquer que $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$ *est aussi égal à la la différence*

$$\left\|\overrightarrow{OP_2}\right\| - \left\|\overrightarrow{OP_1}\right\| = c\left(\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}\right).$$

$$Donc\ V = c\left(\frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}}\right) = c\left(\frac{t_4 - 2t_2 + t_0}{t_4 - t_0}\right)$$

$$= c\left(\frac{(t_4 - t_0) - 2(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0}\right) = c\left(1 - 2\left(\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0}\right)\right).$$

Soit $M = (m_{i,j})$ *la matrice de transformation telle que* $X' = MX$,
X *les cooordonnées d'un point* P *dans la base de* $\mathcal{R}_O$,
X' *les cooordonnées d'un même point* P *dans la base de* $\mathcal{R}_{O'}$.

Plaçons nous maintenant du point de vue de l'observateur O' *qui veut évaluer* V'.
Considérons les coordonnées de l'observateur O *dans* $\mathcal{R}_O$ *et* $\mathcal{R}_{O'}$:
O *a pour coordonnée* $(ct, 0, 0, 0)$ *dans la base assciée à* $\mathcal{R}_O$,
et O *aura pour coordonnées :*
$(ct', x', y', z') = (m_{1,1}\cdot ct, m_{2,1}\cdot ct, m_{3,1}\cdot ct, m_{4,1}\cdot ct)$ *pour la base assciée à* $\mathcal{R}_{O'}$.
Donc $ct' = m_{1,1}\cdot ct$: *on peut donc écrire qu'en* O' $t = \alpha\cdot t'$ *avec nécessairement* $\alpha > 0$.
Si l'observateur O' *évalue* V' *en observant l'horloge sur l'observateur* O,
il obtiendra la même valeur que l'observateur O *puisque en faisant le même calcul il obtient :*

$$V' = c\left(1 - 2\left(\frac{\alpha\cdot t_2 - \alpha\cdot t_0}{\alpha\cdot t_4 - \alpha\cdot t_0}\right)\right) = c\left(1 - 2\left(\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0}\right)\right) = V.$$

La vitesse dans les **2** *cas est collinéaire à* $\overrightarrow{OO'}$ *et le sens de* $\vec{V}$ *est celle de* $\overrightarrow{OO'}$ *pour* O
et $\overrightarrow{O'O}$ *pour* O'.

On peut maintenant évaluer λ :
(*N.M.J. Woodhouse*. " Special Relativity " • *Springer 2002 p.80*)
D'aprés l'axiome **2** *les lois de la physique étant les mêmes pour les espaces associés à* O *et* O' *la dilatation des durée sera la même que ce soit l'observateur* O *observant* O' *ou bien que ce soit l'observateur* O' *observant* O *puisque les situations physiques sont les mêmes, le modules des vitesses étant identique.*
Les coordonnées spatio-temporelle de O' *sont représentée par le vecteur* $X = {}^t(ct, x, y, z)$ *pour l' observateur* O, *et par* $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ *pour l'observateur* O'.
Comme $X = MX'$ *on en déduit que le temps* t *mesuré par un observateur situé en* O *d'une horloge située en* O' *et qui indique le temps* t' *à un observateur situé en* O' *vérifie* $t = m_{1,1}t'$
avec $m_{1,1} > 0$ *si on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps car :*

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1}ct' \\ m_{2,1}ct' \\ m_{3,1}ct' \\ m_{4,1}ct' \end{bmatrix}.$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en $\boldsymbol{O'}$ *observe une horloge située en* $\boldsymbol{O}$ *qui indique un temps* $\boldsymbol{t}$ *pour l'observateur situé en* $\boldsymbol{O}$ • *L'observateur situé en* $\boldsymbol{O'}$ *mesure alors un temps* $\boldsymbol{t'}$ • *Comme* $\boldsymbol{X' = M^{-1}X}$ *et si on pose* $\boldsymbol{N = M^{-1}}$ *on aura* $\boldsymbol{t' = n_{1,1}t}$ *et* $\boldsymbol{n_{1,1} > 0}$ *comme précédemment.*

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment $\boldsymbol{n_{1,1} = m_{1,1}}$.

De $\boldsymbol{{}^tMGM = \lambda \cdot G}$, $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$, *on en déduit que* $\boldsymbol{{}^tM = \lambda \cdot G \cdot M^{-1} G^{-1}}$.

D'où $\boldsymbol{M^{-1} = \lambda^{-1}(G.{}^tM \cdot G) \Rightarrow m_{1,1} = n_{1,1} = (M^{-1})_{1,1} = \lambda^{-1}(G.{}^tM \cdot G)_{1,1}}$.

Or $\boldsymbol{(G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1} = m_{1,1}}$ *donc* $\boldsymbol{\lambda = 1}$ **.**

Les matrices $\boldsymbol{M}$ *qui vérifient* $\boldsymbol{{}^tMGM = G}$ *sont appelées matrices de Lorentz et forment un sous* − *groupe* $\boldsymbol{L}$ *du groupe* $\boldsymbol{GL_n(\mathbb{R})}$ • *En particulier* $\boldsymbol{M^{-1} = G \cdot {}^tM \cdot G}$ *et* $\boldsymbol{\det^2(M) = 1}$ **.**

Pour expliciter $\boldsymbol{M}$ *dans le cas qui nous intéresse on va utiliser les* **2** *théorèmes suivants :*

Théorème 3 : (*J*-*M. Souriau.*"Calcul Linéaire " • *PUF 1964* • *p.378 , voir Annexe* →)

Toute matrice $\boldsymbol{M}$ *de Lorentz peut se mettre sous la forme :*

$$\boldsymbol{M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}} \quad \textit{où } \boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1},$$

$$\boldsymbol{N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & O \end{bmatrix}}, \textit{ avec } \boldsymbol{X \in \mathbb{R}^3} \textit{ tel que } : \boldsymbol{{}^tXX = 1\ ,\ {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}} .$$

$$\textit{De plus} \quad \boldsymbol{\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X{}^tX\right) \end{bmatrix}}$$

Théorème 4 :

(*R. Mneimé , F. Testard* ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ".
Hermann Paris 1986 • *Voir annexe* →)

Soit $\boldsymbol{M}$ *une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice* $\boldsymbol{S'}$ *symétrique définie positive et* $\boldsymbol{O}$ *orthogonale telles que* $\boldsymbol{M = OS'}$.

Conséquences :

On en déduit en posant $\boldsymbol{S = OS'{}^tO \Leftrightarrow S' = {}^tOSO}$ *que* $\boldsymbol{M}$ *peut se décomposer de manière unique en* $\boldsymbol{M = OS' = O({}^tOSO) = SO}$ **.**

Cela entraine que décomposition du théorème **3** *est unique :*

il suffit de vérifier que $\boldsymbol{\exp(\alpha N)}$ *est définie positive .*

αN *est symétrique réelle , il existe donc une matrice* $\boldsymbol{U}$ *orthogonale réelle et une matrice diagonale réelle* $\boldsymbol{D = (d_{i,i})}$ *telle que* $\boldsymbol{\alpha N = {}^tUDU}$ **.**

Comme $\boldsymbol{\exp(\alpha N) = {}^tU\exp(D)U}$ *et* $\boldsymbol{\exp(D) = (\exp(d_{i,i}))}$ *les valeurs propres de* $\boldsymbol{\exp(\alpha N)}$ *sont strictement positive et* $\boldsymbol{\exp(\alpha N)}$ *est définie positive .*

De la formule $\boldsymbol{\det(e^A) = e^{Tr(A)}}$ *on en déduit que* $\boldsymbol{\det(\exp(\alpha N)) = 1}$ *et que* $\boldsymbol{\det(M) = \varepsilon \cdot \det(\Omega) = \pm 1}$ **.**

Chapitre II : Expression de la partie symétrique .

*On considère maintenant un point **O'** qui s'éloigne d'un point **O** à la vitesse constante* $\vec{V}$.

On pose $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ *où **c** est la vitesse de la lumière .*

*On considère les **2** repères* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ *et* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$ *définis plus haut .*

X *étant les coordonnées d'un point **P** dans la base associée à* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$,

X' *étant les coordonnées de ce même point **P** dans la base associée à* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$,

M *la matrice définie par* $X = M \cdot X'$ *la matrice de passage de* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ *à* $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$,

M *est donc une matrice de Lorentz et s'écrit donc sous la forme*

$$M = exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1,\ N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & O \end{bmatrix},$$

avec $X \in \mathbb{R}^3$ *tel que* : ${}^tXX = 1$, ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$. *(voir théorème **3**).*

On va exprimer dans un premier temps exprimer $exp(\alpha N)$ *en fonction de* $\vec{\beta}$.

Théorème 5 :

*En reprenant les notations du théorème **3** on a , si* $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$:

$$exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$ *avec* $[\gamma\vec{\beta}]$ *les coordonnées de* $\gamma\vec{\beta}$ *dans* R_O .

***Démonstration :** On peut donc écrire que les coordonnées de **O'** dans la base associée à* $\mathcal{B}_O$ *sont :*

$${}^tW = {}^t(ct, tV_1, tV_2, tV_3) = ct\,{}^t(1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \text{ avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

et dans $\mathcal{B}'_O$: ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0) = ct'\,{}^t(1, 0, 0, 0)$ *avec* $W = M \cdot W'$.

On remarque d'abord que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$ *donc* $W = exp(\alpha N)\, W'$.

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X\,{}^tX\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t' = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} t \quad ,$$

cela entraine que $t\begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = t'\begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix}$ *et donc* $t = ch(\alpha)t'$ *d'où :*

$$ch(\alpha)\begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \;\Rightarrow ch(\alpha)\vec{\beta} = sh(\alpha)\vec{X}\,,$$

donc $\vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = th^2(\alpha)$ *puisque* $\vec{X}^2 = 1$.

Remarque :

Comme $|th(\alpha)| < 1 \;\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *nécessairement* $\|\vec{\beta}\| = \left\|\frac{\vec{V}}{c}\right\| < 1 \Leftrightarrow \|\vec{V}\| < c$

ce qui exclut toute vitesse supraluminique entre observateurs .

On pose $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$ *et* $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$.

Comme $1 - th^2(\alpha) = \dfrac{1}{ch^2(\alpha)} \Rightarrow ch^2(\alpha) = \dfrac{1}{1 - th^2(\alpha)} = \dfrac{1}{1 - \vec{\beta}^2} = \gamma^2$,

comme $ch(\alpha) \geq 1 \;\; \gamma = ch(\alpha)$; *comme* $sh^2(\alpha) = ch^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$

$$= \frac{1}{1 - \vec{\beta}^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2\beta^2 .$$

En résumé on a $\gamma = ch(\alpha)$, $\gamma^2\beta^2 = sh^2(\alpha)$, $\beta^2 = th^2(\alpha)$.

D'autre part :

$$\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\gamma^2\beta^2}{(1+\gamma)} = (\gamma - 1) = ch(\alpha) - 1$$

et $X_iX_j = \dfrac{(\beta_i\beta_j)}{th^2(\alpha)} = \dfrac{(\beta_i\beta_j)}{\beta^2}$ *donc*

$(ch(\alpha) - 1)X_iX_j = \dfrac{\gamma^2\beta^2}{(1+\gamma)}\dfrac{(\beta_i\beta_j)}{\beta^2} = \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_i\beta_j$, *ce qui permet d'écrire que :*

$$Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X^tX$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)}.$$

Comme $sh(\alpha)X_i = \dfrac{sh(\alpha)\beta_i}{th(\alpha)} = ch(\alpha)\beta_i = \gamma\beta_i$ *d'où le résultat.*

En résumé :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right] \\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]\Omega \\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)}\right)\Omega \end{bmatrix}$$

avec ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Par la suite si on note $C = Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]\Omega \\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & C\Omega \end{bmatrix}$.

Remarques :

$$(1)\, C\left[\vec{\beta}\right] = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)}\right)\vec{\beta} = \vec{\beta} + \gamma^2\frac{\left[\vec{\beta}\right]{}^t\left[\vec{\beta}\left[\vec{\beta}\right]\right]}{(1+\gamma)} = \left[\vec{\beta}\right]\left(1+\frac{\gamma^2\beta^2}{(1+\gamma)}\right)$$

$$= \left[\vec{\beta}\right]\left(1+\frac{\gamma^2-1}{(1+\gamma)}\right) = \gamma\left[\vec{\beta}\right].$$

(2) *Si* $M = M'.M''$ *est le produit de* 2 *matrices de Lorentz sans rotation avec :*

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left(\gamma\vec{\beta}\right)\Omega \\ \gamma\vec{\beta} & C\Omega \end{bmatrix},\ M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t\left(\overrightarrow{\gamma'\beta'}\right) \\ \overrightarrow{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix},\ M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t\left(\overrightarrow{\gamma''\beta''}\right) \\ \overrightarrow{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

alors $M=\begin{bmatrix} \gamma'\gamma''\left({}^t\vec{\beta}'\,\vec{\beta}''+1\right) & \gamma'\gamma''\,{}^t\vec{\beta}''+\gamma'\,{}^t\vec{\beta}'C'' \\ \gamma'\gamma''\vec{\beta}'+\gamma''C'\vec{\beta}'' & \gamma'\gamma''\vec{\beta}'\,{}^t\vec{\beta}''+C'C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma=\gamma'\gamma''\left({}^t\vec{\beta}'\,\vec{\beta}''+1\right)$,

$$\vec{\beta}=\frac{\gamma'\vec{\beta}'+C'\vec{\beta}''}{\gamma'\left({}^t\vec{\beta}'\,\vec{\beta}''+1\right)},\ C=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma^2\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}\ \text{ et }\ \Omega=C^{-1}\left(\gamma'\gamma''\vec{\beta}'\,{}^t\vec{\beta}''+C'C''\right).$$

En notant que $\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right)\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right)=\vec{\beta}\left({}^t\vec{\beta}\vec{\beta}\right){}^t\vec{\beta}=\vec{\beta}^2\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right)$ et que $\gamma^2\vec{\beta}^2=\gamma^2-1$:

$$\left(Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)}\right)\cdot\left(Id_{\mathbb{R}^3}-\gamma\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}\right)$$

$$=Id_{\mathbb{R}^3}-\gamma\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}+\gamma^2\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}-\gamma^3\frac{\vec{\beta}^2\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right)}{(1+\gamma)^2}$$

$$=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)^2}\left(-\gamma(1+\gamma)+\gamma^2(1+\gamma)-\gamma\left(\gamma^2-1\right)\right)=Id_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc $C^{-1}=\left(Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)}\right)^{-1}=Id_{\mathbb{R}^3}-\gamma\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}$, ce qui permet d'écrire Ω en fonction de $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$:

$$\Omega=\left(Id_{\mathbb{R}^3}-\gamma\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}\right)\left(\gamma'\gamma''\vec{\beta}'\,{}^t\vec{\beta}''+C'C''\right)\ \text{ avec :}$$

$$\vec{\beta}=\frac{\gamma'\vec{\beta}'+C'\vec{\beta}''}{\gamma'\left({}^t\vec{\beta}'\,\vec{\beta}''+1\right)},\ C'=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma'^2\vec{\beta}'\,{}^t\vec{\beta}'}{(1+\gamma')}\ \text{ et }\ C''=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma''^2\vec{\beta}''\,{}^t\vec{\beta}''}{(1+\gamma'')},\ \gamma=\gamma'\gamma''\left({}^t\vec{\beta}'\,\vec{\beta}''+1\right).$$

(**3**) La connaissance de $C^{-1}=Id_{\mathbb{R}^3}-\gamma\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}$ permet d'évaluer Ω en fonction de M :

$M=\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$ • Considérons le bloc $\mathfrak{m}=\begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{3,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$

qui représente les composantes spatiales des vecteurs spatiaux de la base associée à O' exprimées

dans la base associée à $\boldsymbol{O}$.

On aura $\Omega = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}$. (4) *Si* $\vec{\boldsymbol{\beta}} /\!/ \vec{\boldsymbol{i}}$ *alors les termes non diagonaux de* $\boldsymbol{C}$ *sont nuls ,*

et un seul terme diagonal de $\boldsymbol{C}$ *est différent de* $\boldsymbol{1}$: $1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 = \dfrac{(1+\gamma)+\gamma^2\vec{\beta}^2}{(1+\gamma)}$

$= \dfrac{1+\gamma+\gamma^2-1}{(1+\gamma)} = \gamma$ *car* $\gamma^2 - 1 = \dfrac{1}{1-\vec{\beta}^2} - 1 = \dfrac{\vec{\beta}^2}{1-\vec{\beta}^2} = \gamma^2\vec{\beta}^2$.

(5) *Comme* $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$ *on peut remplacer , en notant* δ_j^i *le symbole de Kronecker ,*

$\delta_j^i + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_i\beta_j$ *par* $\delta_j^i + (\gamma - 1)\dfrac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}$ *dans l'évaluation de* $Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X^tX$

car $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \dfrac{(\gamma-1)}{\beta^2}$.

(6) $\gamma\cdot(1+\beta) = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ *car :*

$1 - \beta^2 = \dfrac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - \dfrac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \Leftrightarrow \gamma\cdot\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}$.

Donc $\dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}\right)$;

et on retrouve que $\boldsymbol{argth}(\beta) = \boldsymbol{argcosh}(\gamma) = \alpha$ *car* $\gamma = ch(\alpha)$ *et* $\beta = th(\alpha)$.

(7) *Sachant que* $[\exp(\alpha N)]^{-1} = \exp((-\alpha)N)$, $\gamma = ch(\alpha)$ *et* $\vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X}$ *il vient :*

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -{}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ -[\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}.$$

Chapitre III : Expression de la partie orthogonale .

Maintenant évaluons $\boldsymbol{\varepsilon}$ *et* $\boldsymbol{\Omega}$

(1) *Evaluation de* $\boldsymbol{\varepsilon = \pm 1}$ *:*

Comme

$$W = MW' = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \gamma\varepsilon & {}^t[\gamma\vec{\beta}]\Omega \\ \varepsilon[\gamma\vec{\beta}] & C\Omega \end{bmatrix} W'$$

avec ${}^tW = {}^t(ct, tV_1, tV_2, tV_3)$, ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ *.On en déduit que* $\boldsymbol{t = \varepsilon \cdot \gamma \cdot t'}$ **.**

Donc si $\boldsymbol{\varepsilon = -1}$ *, il y aurait un renversement du temps difficile à justifier physiquement .*

Par la suite on suppose que $\boldsymbol{\varepsilon = +1}$ *.*

Reste à évaluer $\boldsymbol{\Omega}$ *. On posera* $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ *.*

Remarquons tout d'abord que $\boldsymbol{M}$ *est symétrique* $\Leftrightarrow \boldsymbol{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^3}$

car $\boldsymbol{M = S\hat{\Omega} = M\, Id_{\mathbb{R}^4}}$ *avec* $\boldsymbol{S}$ *symétrique définie positive , par unicité de la décomposition* $\boldsymbol{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Introduisons maintenant la notion de bases standards :

On dit que $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *sont* **2** *bases standards si la matrice de passage M de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *vérifie :*

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) *Construction de bases standards :*

Soit **2** *observateurs* $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ • $\boldsymbol{O'}$ *en translation uniforme par rapport à* $\boldsymbol{O}$

de vitesse $\vec{V}$ • *On pose* $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{\vec{V}}{c}$ *avec c la vitesse de la lumière .*

On munit $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ *de* **2** *bases spatiales orthonormées* $\boldsymbol{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *et*

$\boldsymbol{B'}(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ *associée aux bases spatio − temporelles* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$**.**

On note $\boldsymbol{M}$ *la matrice de Lorentz de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *:*

$\boldsymbol{M} = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$: $\boldsymbol{X = MX'}$ *avec* $\boldsymbol{X}$ *les coordonnées d'un vecteur dans la base* $\mathcal{B}$, $\boldsymbol{X'}$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *.*

Considérons le cas où $\vec{\boldsymbol{\beta}} \,/\!/\, \vec{i} \,/\!/\, \vec{i}'$ *et de même sens ,* $\boldsymbol{M}$ *s'écrira :*

$$M=\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0\\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \omega_{1,3}\\ 0 & \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3}\\ 0 & \omega_{3,1} & \omega_{3,2} & \omega_{3,3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\beta\,\omega_{1,1} & \gamma\beta\,\omega_{1,2} & \gamma\beta\,\omega_{1,3}\\ \gamma\beta & \gamma\omega_{1,1} & \gamma\omega_{1,2} & \gamma\omega_{1,3}\\ 0 & \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3}\\ 0 & \omega_{3,1} & \omega_{3,2} & \omega_{3,3}\end{bmatrix},$$

car dans le cas général $M=\begin{bmatrix}\gamma & {}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]\\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \Omega\end{bmatrix}$ *avec*

$$C=\begin{bmatrix}1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3\\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3\\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2\end{bmatrix}$$ *et* Ω *orthogonale .*

Remarque complémentaire :

Comme $\vec{\beta}\,//\,\vec{i}\,//\,\vec{i'}$ *on peut se restreindre à un problème à une dimension spatiale et résoudre exactement ce problème classique de solution* $\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\cdot\beta\\ \gamma\cdot\beta & \gamma\end{bmatrix}$.

Ce qui implique que $\omega_{1,1}=1$ *et* $\omega_{2,1}=\omega_{3,1}=\omega_{1,2}=\omega_{1,3}=0$ *.*

Ω *est donc une rotation d'axe* $\vec{\beta}$ *.*

On peut maintenant construire une paire de bases standards .

L'observateur O' *fait un changement de base de* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}''$

avec $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & {}^t\Omega\end{bmatrix}$ *comme matrice de passage en faisant un changement de base spatial et en conservant la même horloge .*

On a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{B}'')=\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{B}').\mathcal{P}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')=\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0\\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Donc $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}''$ *sont* **2** *bases standards associées à* O *et* O' *.*

(3) *Application des bases standards à l'évaluation de la partie orthogonale d'une décomposition polaire d'une matrice de Lorentz :*

Comme précédemment on considère $\boldsymbol{2}$ *observateurs* $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ • $\boldsymbol{O'}$ *en translation uniforme par rapport à* $\boldsymbol{O}$ *de vitesse* $\vec{V}$ • *On pose* $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{\vec{V}}{c}$ *avec* $\boldsymbol{c}$ *la vitesse de la lumière .*
On munit $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ *de* $\boldsymbol{2}$ *bases spatiales orthonormées* $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{B'}$ *associée aux bases spatio* $-$ *temporelles* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ • *On note* $\boldsymbol{M}$ *la matrice de Lorentz de passage de* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *à* $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ *:* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\wp}(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{B}'})$ *:* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{MX'}$ *avec*
$\boldsymbol{X}$ *les coordonnées d'un vecteur dans la base* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{X'}$ *dans la base* $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$.
On peut aussi construire $\boldsymbol{2}$ *bases standards* $\boldsymbol{\mathcal{B}_0}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{B}_0'}$ *associée à* $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$.

$$\text{Soit } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\wp}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{B}_0}\right) \text{ et } \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\wp}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}'}, \boldsymbol{\mathcal{B}'_0}\right),\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\wp}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}_0}, \boldsymbol{\mathcal{B}_0'}\right) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\wp}(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{B}'}) = \boldsymbol{\wp}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{B}_0}\right)\boldsymbol{\wp}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}_0}, \boldsymbol{\mathcal{B}_0'}\right)\boldsymbol{\wp}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}'_0}, \boldsymbol{\mathcal{B}'}\right) = \boldsymbol{AN}\,{}^t\boldsymbol{D}$$

$$= \left(\boldsymbol{AN}{}^t\boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{A}{}^t\boldsymbol{D}\right).$$

Par unicité de la décomposition $\boldsymbol{AN}{}^t\boldsymbol{A}$ *est égal à la partie symétrique de* $\boldsymbol{M}$ *et* $\boldsymbol{A}{}^t\boldsymbol{D}$ *est égal à la partie orthogonale de* $\boldsymbol{M}$.
Par définition $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{D}$ *sont indépendants de* $\|\vec{\boldsymbol{\beta}}\|$ • *Donc la partie orthogonale de* $\boldsymbol{M}$ *est indépendante de* $\|\vec{\boldsymbol{\beta}}\|$.
De plus la partie symétrique de $\boldsymbol{M}$ *tend vers la matrice unité lorsque* $\|\vec{\boldsymbol{\beta}}\| \to 0$.

$$\text{Comme } \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]\boldsymbol{\Omega} \\ [\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] & \boldsymbol{C\Omega} \end{bmatrix},\ \lim_{\|\vec{\boldsymbol{\beta}}\|\to 0}\left(\boldsymbol{M}(\vec{\boldsymbol{\beta}})\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}$$

$$\text{car } \lim_{\|\vec{\boldsymbol{\beta}}\|\to 0}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{Id}.$$

$$\text{Or lorsque } \|\vec{\boldsymbol{\beta}}\| = 0,\ \boldsymbol{\wp}(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{B}'}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Donc } \lim_{\|\vec{\boldsymbol{\beta}}\|\to 0}\left(\boldsymbol{M}(\vec{\boldsymbol{\beta}})\right) = \boldsymbol{M}(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}.$$

Si on appelle $\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}})$ *la partie symétrique de* $\boldsymbol{M}$ *:*

$$\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] \\ [\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{C}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix},$$

On a :

$$M(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Omega = \Lambda(\vec{\beta}).M(\vec{0}).$$

En particulier $M(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\beta}) \Leftrightarrow M(\vec{0}) = Id \Leftrightarrow$ *Les vecteurs de base spatiaux sont parallèles pour* $\vec{\beta} = \vec{0}$.

Remarque :

On aurait pu remplacer $\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *par toute autre matrice de Lorentz symétrique .*

Bibliographie :

Annequin et Boutigny ."Mécanique relativiste ,Exercices ".*Vuibert 1978.*
R.G. Bartle ." Modern theory of integration ".*AMS 2001.*
Berkeley(*Cours de Physique vol 1*) ."Mécanique".*Armand Colin 1972.*
P • Boyer ."Algèbre et Géométries " . *C&M 2015* .
P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968 .
J. Dieudonné."Eléments d'analyse " .*Gauthier − villars 1969* .
F • R • Gantmacher."Théorie des matrices " *• Edition J • Gabay 1990.*
R.Goblot ."Algèbre linéaire "*Masson 1995* .
E.Gourgoulhon ."Relativité restreinte" *• EDP Sciences 2010* .
J. Grifone."Algèbre Linéaire" *• Cepadues éditions 2002* .
J − B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec."Exercices Algèbre linéaire".*Cepadues éditions 1988* .
D.Langlois."Introduction à la relativité" *• Vuibert 2011.*
J • M Lévy − Leblond • One more derivation of the Lorentz transformation.
American Journal of Physics, *vol* 44, *n* ∘ 3, *March* 1976 *p271* − 277
J.R. Lucas , P.E. Hodgson "Spacetime and electromagnetism " .*Clarenton Press 1990* .
R. Mneimé , F. Testard ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ". *Hermann Paris 1986* .
J - M. Monier."Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997* .
J.Ph.Pérez ." Relativité et invariance "*Dunod 2011.*
W.Rudin ."Analyse réelle et complexe ".*Masson 1978* .
C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". *Dunod 2010.*
J - M. Souriau."Calcul Linéaire ".*PUF 1964* .
N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " .*Springer 2002* .

Travaux préparatoires :
https ://archive • org/details/version − 1 *a_202006/mode/*2 *up*
https ://archive • org/details/matricesdelorentz
*https ://archive • org/details/p_20220209_202202/mode/*2 *up*
https ://archive • org/details/une − nouvelle − approche − axiomatique −
*de − la − theorie − de − la − relativite − restreinte − docu/mode/*2 *up*
https ://hal- amu • archives- ouvertes • fr/hal- 02965773 */document*